<u>Chapitre2 : GRAPHES (Partie 1)</u>

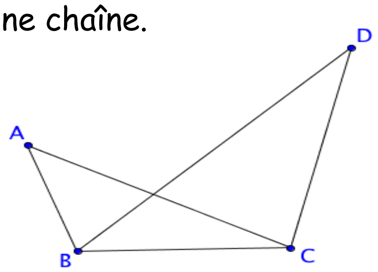
<u>Objectifs :</u>
**Savoir ce qu'est un graphes et comment les utiliser*
** Savoir résoudre des problèmes à l'aide de graphe*

<u>I. Construction de graphes</u>

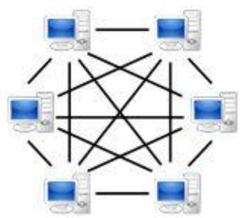
<u>Exercices : *Déclic TES/L 2016 Hachette*</u>
1,2p262

<u>Définitions :</u>
- On appelle graphe non orienté un ensemble de points, appelés sommets, reliés par des lignes, appelées arêtes.
- L'ordre du graphe est le nombre de sommets.
- Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes partant de ce sommet.
- Deux sommets reliés par une arête sont adjacents.
- Dans un graphe, une chaîne est une succession d'arêtes mises bout à bout.
- Un graphe est dit complet si deux sommets quelconques sont adjacents.
- Un graphe G est connexe si chaque couple de sommets est relié par une chaîne.

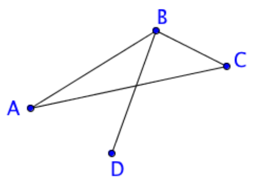
<u>Exemple :</u>Le schéma suivant s'appelle un **graphe**.
Il possède 4 **sommets** ; on dit qu'il est d'**ordre** 4.
Les sommets A et C sont **adjacents** car ils sont reliés par une arête.
Le sommet C est de **degré** 3 car 3 arêtes partent de C.



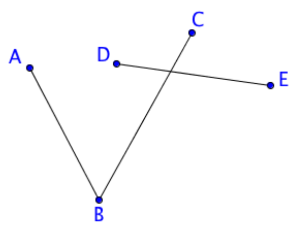
<u>Exemple :</u> Le réseau d'ordinateur représenté ci-contre est un graphe complet en effet tous les sommets sont reliés deux à deux.



<u>Exemple :</u>



Graphe connexe



Graphe non connexe, les sommets C et E, par exemple, ne peuvent être reliés.

<u>Propriété :</u> La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes.

<u>Exercices : *Déclic TES/L 2016 Hachette*</u>
7,9,12,13p272+25,27p274
<u>Exercices supplémentaires : Déclic TES/L 2016 Hachette</u>
8p272+26,28,29p274

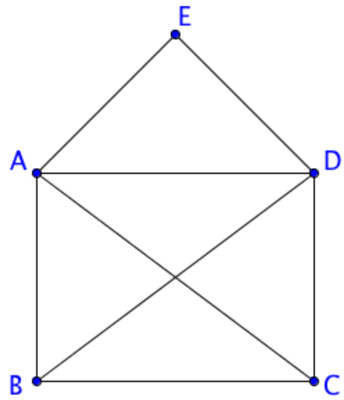
II. Chaînes

1) Chaîne eulérienne

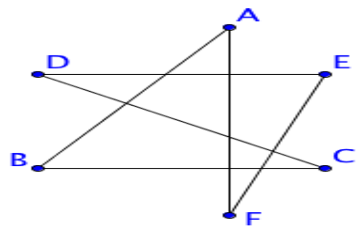
Exercices : *Déclic TES/L 2016 Hachette*
5p264

Définitions :
- Une chaîne eulérienne d'un graphe *G* est une chaîne qui contient une fois et une seule toutes les arêtes du graphe *G*.
- Un cycle eulérien est une chaine eulérienne fermée.

Exemples :
a) Une chaîne eulérienne peut être tracée d'un trait continu sans repasser par une arête déjà tracée.
C'est le cas du célèbre jeu de *l'enveloppe* où l'on doit tracer l'enveloppe sans lever le stylo ni repasser sur un trait déjà tracé :
La chaîne B – A – D – B – C – D – E – A – C est par exemple une chaine eulérienne.



b) Dans le graphe ci-contre, la chaîne A – B – C – D – E – F – A est un cycle eulérien.



Théorème d'Euler : Soit *G* un graphe connexe.
G admet une chaîne eulérienne si, et seulement si, zéros ou deux sommets de *G* sont de degré impair. Dans le cas où *G* possède deux sommets de degré impair, la chaîne est d'extrémité ces deux sommets.
G admet un cycle eulérien si, et seulement si, tous les sommets de *G* sont de degré pair.

Exercices : *Déclic TES/L 2016 Hachette*
2,3,4p270+10p270+15,16,17p273+32,35,36p275+39,43,44p277

Exercices supplémentaires : Déclic TES/L 2016 Hachette
1p270+14p273+33,37p275+40,42p276

2) Matrice associée à un graphe

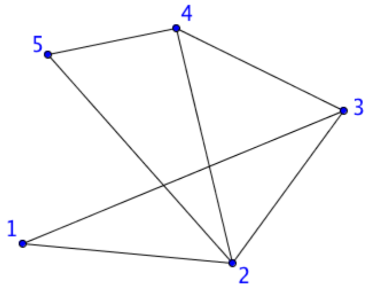
Exercices : *Déclic TES/L 2016 Hachette*
7p266

Définition : La longueur de la chaîne est le nombre d'arêtes qui la compose.

Définition : Soit un graphe *G* d'ordre *n* dont les sommets sont numérotés de 1 à *n*. La matrice d'adjacence associée à *G* est la matrice carrée M de taille *n* dont chaque coefficient m_{ij} est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets *i* et *j*.

Exemples :

a) La matrice d'adjacence associée au graphe ci-contre est :



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On constate que la diagonale est formée de 0 car aucun sommet n'est relié avec lui-même.
On constate également que la matrice est symétrique par rapport à la diagonale car $m_{ij} = m_{ji}$.

b) La matrice d'adjacence associée au graphe ci-contre est $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque : L'arête dont les extrémités ont le même sommet 1 s'appelle une boucle.

Propriété : Soit une matrice d'adjacence *M* d'un graphe *G* non orienté d'ordre *n* dont les sommets sont numérotés de 1 à *n*. Le nombre de chaîne de longueur *k* reliant le sommet *i* au sommet *j* est égal au terme m_{ij} de la matrice M^k, pour tout entier naturel k..

Exemple : On reprend l'exemple a) précédent. On cherche le nombre de chaînes de longueur 4 reliant les sommets 1 et 3. A l'aide de la calculatrice, on calcule la matrice A^4.

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 11 & 14 & 9 \\ 13 & 26 & 19 & 19 & 13 \\ 11 & 19 & 19 & 14 & 14 \\ 14 & 19 & 14 & 19 & 11 \\ 9 & 13 & 14 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

Le nombre de chaîne de longueur 4 reliant le sommet 1 au sommet 3 est égal au coefficient $a_{1,3}$ ou $a_{3,1}$ de la matrice A^4. Ainsi, il existe 11 chaînes de longueur 4 reliant les sommets 1 et 3.
Par exemple : 1 – 2 – 5 – 4 – 3 ou encore 1 – 2 – 3 – 2 – 3.

Exercices : *Déclic TES/L 2016 Hachette*
9,10p269+6p271+11p272+19,20,21,22p273+45,47p277+49,54p278+55,56,57p279+59,61,62p280
Exercices supplémentaires : Déclic TES/L 2016 Hachette
5p271+18p273+46,48p277+50,52,53p278+56,58p279+60p280+63,64,65p281